

Het bestaan van een wiskundig object

Woord vooraf

Deze notitie is geschreven voor belangstellenden, maar speciaal voor de vrienden die zijn aangesloten op onze besloten website voor filosofie van de wiskunde.

Mijn doel is een basis te leggen voor (het bespreken van) het bestaan van wiskundige objecten, en de wijze - en zo je wilt - de 'plaats' waar deze bestaan.

Veel leesplezier.

Jan van Linschoten

Den Haag, 19 november 2017

Inleiding.

We kunnen bepaalde vragen stellen over wiskundige objecten en over het bestaan er van.

Zoals bekend is dit een lastig terrein, vol met valkuilen.

Wij – als lees-/studiegroepje – proberen ons in (filosofische) vragen over deze materie te verdiepen.

Met deze korte notitie wil ik daar ook een verkennende bijdrage aan leveren. Daarbij poog ik als – ongeschoolde filosoof – toch enigszins systematisch en streng te werk te gaan. En de vele zijwegen en valkuilen zo goed mogelijk te vermijden, of juist duidelijk te signaleren.

Het doel? Een 'terreinverkenning'.

De inspiratie voor deze bijdrage komt voort uit de 'lopende discussie' over 'Platonisme' versus andere gezichtspunten in de filosofie van de wiskunde (al loopt deze discussie wel langzaam..).

N.B. deze notitie is dus niet (bedoeld als) een verkenning naar 'Wiskunde en Werkelijkheid' - de titel van een lezingenserie om 2018.

Afbakening (scope) en taalgebruik (terminologie).

Taal en begrippen.

Wat 'we' hier doen is het in woorden (taal) spreken over wiskunde. En over onze eigen inzichten daarover en ervaringen daarmee.

Het gebruik van taal is lastig en heeft alle ruimte in zich voor het ontstaan van misverstanden en (eigen) interpretaties.

Het gebruik van taal is echter onvermijdelijk. Het meest lastige is om – vooraf al – tot een consensus te komen over de gebruikte taal en begrippen (noties) en de wijze waarop 'we' met elkaar afstemmen of we hetzelfde 'beeld' of 'begrip' ervaren bij elkaars taalgebruik.

Taalgebruik is immers niet objectief maar veeleer 'intersubjectief' – een wat ouderwetse term.

Het is dus goed om juist in het begin precies met elkaar helder te krijgen waar we over praten.

Een bepaalde verzameling van taal en begrippen moeten we vooraf als geldend en gezamenlijk 'begrepen' aannemen. Zonder dat is communicatie niet mogelijk.

En waar nodig kunnen we onze gezamenlijke begrippenwereld verder uitbreiden en mogelijk helderder definiëren.

De verkenning

Twee centrale begrippen staan voor ogen.

1. het 'wiskundig object'.
2. het 'bestaan'.

'Wiskundig object' en 'bestaan' zijn kortom de te onderzoeken hoofdbegrippen.

(Vooraf zij gezegd dat 'bestaan' in deze notitie absoluut iets anders is dan 'werkelijkheid' of 'de wereld waarin wij leven' of ons 'universum'.)

Deel I: Wiskundige objecten

Als eerste het 'wiskundig object'.

Zonder nu het begrip 'wiskundig' of 'object' verder te willen duiden wil ik deze noties voaalsnog als gegeven begrippen in onze taal beschouwen.

Het gaat dan nader om de vraag wat wiskundige objecten precies zijn; welke voorbeelden we er van kunnen geven en welke rol ze - later - in onze redenering spelen.

Waarom? Omdat we over wiskundige objecten willen spreken en kijken 'waar ze zich bevinden' – al dan niet Platonisch' c.q. op welke wijze ze 'bestaan'.

De volgende objecten lijken mij intessant om nader te beschouwen:

ten eerste: de cirkel.

ten tweede: de groep.

ten derde: het Monster.

1. De cirkel.

Wat 'is' een cirkel?

We kunnen naar de historie van de cirkel kijken: een stok in de grond, met een touw en nog een stok er aan om een cirkel op de grond af te tekenen. Of de waarneming van iemand die naar een doorsnede van een ronde stengel of stam kijkt. En niet in het laatst: het zien van de volle ronde maan. Dit alles lijkt erg triviaal maar is het niet. Daarop wil ik later terugkomen.

Meer wiskundig: allereerst in de vlakke meetkunde: de figuur die je met een passer op papier – in het platte vlak! – kan tekenen. Of in termen van de middelbare schoolwiskunde van begin vorige eeuw: een cirkel is – in het platte vlak – de meetkundige plaats van alle punten die op gelijke afstand van een punt (het centrum) liggen.

Al snel gegeneraliseerd tot: alle punten die in een vlak (hoeft niet per se plat te zijn, denk bv aan een bolsegment) op gelijke afstand tot een (middel)punt liggen.

In formulevorm in de analyse (calculus): alle punten (x_1, x_2) waarvoor geldt $(x_1)^2 + (x_2)^2 = r^2$ waarbij voor de eenvoud de oorsprong $(0,0)$ als middelpunt is gekozen.

Gegeneraliseerd: de verzameling van alle punten (x_1, x_2) uit $\mathbf{R}^2$ waarvoor bovenstaande formule geldt.

In de laatste twee formuleringen komt de afstand van een punt op de cirkel tot het middelpunt helder in beeld: de afstand r . Kortom, om een cirkel te definiëren hebben we het begrip 'afstand' tussen twee punten in $\mathbf{R}^2$ nodig: er moet een metriek gedefinieerd zijn.

Kijk je wat dieper, dan zie je ook de twee dimensies van $\mathbf{R}^2$ opduiken: het begrip dimensionaliteit van de ruimte (reëel, om ons heen, danwel abstract) gaat een rol spelen, en de notie 'vlak' vertaalt zich naar twee dimensies als voorwaarde voor het kunnen definiëren van een cirkel. Een cirkel heb je dus niet zo maar - er moet al aan enige onderliggende voorwaarden en axioma's voldaan worden.

Ook is het mogelijk gebruik te maken van een onderliggend axiomatisch stelsel uit de verzamelingenleer om helder te kunnen spreken van punt, verzameling, en vervolgens na enig werk, van metriek en dimensies.

Hebben we nu een cirkel?

Voor de eenvoud van de redenering: ja! We weten gezamenlijk wat we bedoelen en kunnen dat aan elkaar uitleggen.

'Bestaat' die cirkel nu?

Op dit moment is over deze vraag nog geen redenering op te zetten - immers, in de notie 'bestaan' hebben we ons nog niet verdiept en er nog geen definities voor afgesproken.

Of de cirkel nu bestaat, of al bestond voordat wij bovenstaande exercitie uitvoerden? Niet per sé. Het antwoord mag natuurlijk ja zijn – immers, veel mensen hadden (eenvoudig of ingewikkeld) dit proces al voor ons (in de tijd gezien) uitgevoerd of uitgedacht (of de figuur ofwel vorm van de 'cirkel' gewoon waargenomen).

Het is nog wel belangrijk om te weten waaraan wij – zonder alle redenering en definities – een cirkel kunnen herkennen.

Naar mijn idee is het mogelijk het 'herkennen' van een cirkel buiten de wiskunde als zodanig te plaatsen. Maar deze intuïtieve herkenning – eventueel nadat iemand er ons gewezen heeft op wat een cirkel is, hoe die er uit ziet – is wel van belang voor verdere redeneringen.

Eenvoudig gezegd is datgene dat ons aanspreekt (in waarneming, dus neurofysiologisch en mentaal) de 'rondheid' of, beter gezegd, de onveranderlijkheid van de figuur onder rotatie.

De cirkel is rotatiesymmetrisch, en dát gegeven nemen wij rechtstreeks waar. Op vele manieren.

Dat brengt als verdere veronderstelling met zich mee dat wij (als mensen) in het algemeen (erg) ontvankelijk zijn voor symmetrieën bij het waarnemen.

Opmerking:

de cirkels die wij rechtstreeks kunnen waarnemen (op papier getekend etc.) zijn natuurlijk geen 'wiskundige' cirkels. Die laatste zijn opgebouwd uit 'oneindig kleine' punten op een 'oneindig dunne' lijn - en dus per definitie nooit zichtbaar of waarneembaar.

Het is goed ons bewust te zijn van de wijze waarop wij geleerd hebben een cirkel te herkennen en te tekenen, en vervolgens geleerd hebben de getekende cirkel te zien als een 'representatie' (in ons dagelijks leven) van de niet waarneembare wiskundige cirkel - het wiskundig object.

De wiskundige objecten zijn dus - als het ware 'per definitie' - nooit waarneembaar. Wij moeten ze ons voorstellen.

Het is overigens bekend dat er veel wiskundigen zijn die wars zijn van het maken van (visuele) voorstellingen van hun onderwerpen; zij redeneren daadwerkelijk in een abstracte 'wereld'.

Tot slot:

de boven besproken 'wiskundige cirkel' is ons eerste wiskundige object om te gebruiken voor verder onderzoek. Onderzoek naar de wijze waarop dat object 'bestaat' en 'waar dat object te vinden is'.

2. De groep

Een uitermate belangrijk wiskundig 'object' is de 'groep'.
Even ter herinnering: wat noemen wij een 'groep'?

Ik citeer even de definitie zoals gegeven in het college Algebra I (Stevenhagen - Delft, Leiden):

2.1. Definitie.

Een verzameling G voorzien van een bewerking $\circ$ heet een groep als aan de volgende drie voorwaarden is voldaan.

(G1) G bevat een eenheidselement e voor de bewerking $\circ$;

(G2) voor elk drietal elementen $a, b, c \in G$ geldt de associatieve eigenschap

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c;$$

(G3) voor elk element $a \in G$ bestaat er een element $a^\dagger \in G$ met

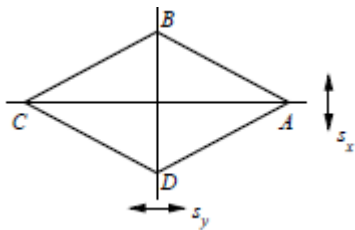
$$a \circ a^\dagger = a^\dagger \circ a = e.$$

Ter beperking van tijd en ruimte ga ik hier niet op een inhoudelijke uitleg in.

Wel twee illustraties van groepen:

1. De symmetrieën van een ruit vormen een groep.
2. De permutatiegroep S_3 .

1. De **symmetrieën van de ruit** zijn eenvoudig in te zien met de volgende figuur :



er zijn 4 symmetrieën:

- spiegeling in de x-as: notatie s_x
- spiegeling in de y-as: notatie s_y
- rotatie van 180° rond de oorsprong h
- de identiteit: id .

Een samenstelling van twee of meer symmetrieën leidt weer tot een symmetrie:

$$s_y \circ s_x = h$$

dat betekent eerst de operatie s_x uitvoeren op de ruit, en vervolgens de operatie s_y , het resultaat is een halve draai (rotatie 180°) om de oorsprong.

De aldus gevonden verzameling V_4 van de genoemde 4 elementen (symmetrieën) heet de *viergroep van Klein*: $\{ id, s_x, s_y, h \}$.

2. De **permutatiegroep S_3** is de groep van 6 bewerkingen (volgordes) waarin drie verschillende elementen A, B en C (of 1, 2 en 3) gepermuteerd kunnen worden. Daarbij zijn er 5 'echte' permutaties en één die geen verandering geeft: de identiteit **id**.

Voor de volledigheid:

<u>permutatie</u>	<u>aanduiding</u>
1 2 3 $\rightarrow$ 1 2 3	id
1 2 3 $\rightarrow$ 1 3 2	(bc)
1 2 3 $\rightarrow$ 2 1 3	(ab)
1 2 3 $\rightarrow$ 2 3 1	(acb)
1 2 3 $\rightarrow$ 3 1 2	(abc)
1 2 3 $\rightarrow$ 3 2 1	(ac)

Deze permutaties vormen de *symmetriegroep S_6* met 6 elementen:

{ id, (bc), (ab), (acb), (abc), (ac) }.

N.B. de notatie betekent:

(bc): getal op positie b gaat naar positie c, dat op positie c gaat naar positie b:

positie	a	b	c		a	b	c
startelement	1	2	3	(bc) $\rightarrow$	1	3	2

Voor ons doel gaat het nu om het begrip 'groep', waarvan boven twee voorbeelden zijn gegeven.

Het abstracte begrip 'groep' heeft als definitie / wordt dus vormgegeven door:

a. de verzamelingstheoretische begrippen 'element' en 'verzameling' en de basisaxioma's uit de verzamelingenleer;

b. de verbijzondering door toevoeging van de extra **groepsdefinities**.

De groep is ons tweede wiskundige begrip.

3. Het 'monster'

Het 'monster' is de bijnaam voor een enkele decennia geleden 'ontdekte' speciale 'groep': de grootste uit de zogenaamde Monster group. Dit laatste is een verzameling van 20 'sporadische groepen'. Een sporadische groep is een speciaal type groep met extra, bijzondere eigenschappen.

Gedurende een groot deel van de vorige eeuw is er gewerkt aan het 'opsporen' en classificeren van de 'finite simple groups' - 'eindige enkelvoudige groepen'.

Vanaf 1979 hebben een aantal wiskundigen onder coördinatie van Gorenstein zich hiermee in het bijzonder bezig gehouden. Het project is in de jaren negentig min of meer afgerond nadat men bewezen had dat nu alle eindige enkelvoudige groepen waren 'ontdekt'.

Voor geïnteresseerden een link: https://en.wikipedia.org/wiki/Sporadic_group

Over het Monster zijn zeker twee boeken geschreven, waarvan één ook vertaald in het Nederlands:
Het Symmetrie Monster - Marcus du Sautoy;
Symmetry and the Monster - Mark Ronan.
De ontdekking heeft indertijd veel stof doen opwaaien.

Dit 'Monster' is ons derde wiskundige begrip.

Analyse en tussenresultaat

Drie wiskundige objecten zijn nu het uitgangspunt voor een verdere redenering:

- de cirkel en het monster - beide specifieke objecten die volkomen beschreven en gedefinieerd zijn (behoudens dan het middelpunt en de straal van de cirkel, die we niet nader hebben gekozen), en
- de groep, als een verzameling van objecten die alle aan een bepaalde extra set voorschriften voldoen.

De beide specifieke objecten zijn ieder op hun beurt verzamelingen:

de cirkel een verzameling van punten in $\mathbb{R}^2$ voldoend aan een bepaalde restrictie met een op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerde metriek (afstandsmaat);

het Monster een eindige verzameling getallen en relaties tussen getallen, elementen uit $\mathbb{N}$ (de natuurlijke getallen), aangevuld met definities van Groepen en Sporadische Groepen.

De 'Groep' zelf is een verzameling van axioma's en aanvullende groeps-definities die algemeen toegepast kunnen worden op verzamelingen.

Als we het bovenstaande opnieuw rangschikken en wat meer algemeen benoemen, blijken de voorbeelden dus uit de volgende wiskundige bouwstenen (objecten) te zijn samengesteld:

- elementen
- verzamelingen van elementen
- de 'regels van de verzamelingenleer'
- verzamelingen met een afstandsmaat, waarbij de elementen n-tuples zijn)
- de natuurlijke en reële getallen (met de geldende definities en regels)

en nog een aantal niet benoemde regels.

(Opmerking: hiermee is dus nog helemaal niet ingegaan op 'vermoedens' en 'bewijzen' in de wiskunde. En de vraagstukken die er liggen op het bewijzen van vermoedens. Dat is nu niet aan de orde.)

Vervolgens is het nodig na te gaan wat wij kunnen begrijpen en afspreken over het 'bestaan' van onze wiskundige voorbeelden en bouwstenen.

+ - + - +