Het oneindig kleine bij Zeno's paradoxen

Vrij naar de Reader, pag. 10 e.v.

Natuurlijk is het bekend terrein: het denken over steeds kleiner wordende eenheden van lengte, oppervlak en tijd.
Bij de paradox van Achilles en de schildpad komt er een aspect bíj: de totale afstand kan niet overbrugd worden. Alleen wij zien, terugkijkend, dat het wel kan in een 'oneindig aantal stappen' (neem dit 'oneindig' niet letterlijk..).

Bij de pijlparadox spreekt Zeno over een 'instant', een 'moment' - waarmee hij (kennelijk?) een uniek, ondeelbaar tijdstip bedoeld. Want, zegt hij, tijd is opgebouwd uit 'instants' die niet verder onderverdeeld kunnen worden.
Vervolgens veronderstelt hij dat de pijl bij het begin van de 'instant' zich op een andere plaats zou bevinden dan bij het einde van de 'instant'.
En dan volgt tenslotte tegenspraak - de pijl staat stil, op die (ondeelbare) 'instant' (notie 1).
Dus de pijl beweegt in het geheel niet, is zijn eindconclusie. (notie 2).

Het is niet nodig iets in te brengen tegen notie 1. Zowel in een abstract model als in de (klassieke !) fysica zouden we ons kunnen voorstellen dat de pijl op 'instant' t_0 (tijdstip t_0) zich uitsluitend bevindt op positie $x_{0.}$ (Voor het gemak beschouwen we hierbij maar de - oneindig kleine - pijlpunt).
Zijn 2e notie is echter foutief (weten we nu). Er is weliswaar een abstract model denkbaar waarbinnen de pijlpunt op ieder tijdstip t_x zich bevindt op een andere positie $x_{t(x0}$ zonder dat er sprake is van een 'beweging' in de tijd.
Maar we moeten terug naar de Grieken, die hun redenering wel degelijk wilden koppelen aan de (fysieke) werkelijkheid en voor díe werkelijkheid een verklaring zochten.

Zoals bekend moeten we dan een flink aantal eeuwen verder naar de notie van het beschouwen van de verplaatsing van een (fysiek) voorwerp, toevallig weer gerepresenteerd als *punt* (in de klassieke mechanica - in de quantum mechanica hebben we met een andere benadering en model te maken), en komen we uit bij onder andere Newton (en Leibniz) die - populair gezegd - de quotienten van kleine verplaatsingen in kleine tijdseenheden gingen bekijken. En het idee hadden om die intervallen in tijd en plaats op steeds kleinere schaal te beschouwen.
Het concept van $(x_0 + \Delta x) / (t_0 + \Delta t)$ was geboren, inclusief het nemen van de limiet van $\Delta t \rightarrow 0$, (gesymboliseerd door δt en δx), de infinitesimalen in de differentiaal- en integraalrekening.
Mogelijk gingen zij daarbij ook uit van continue, zich 'wel' gedragende functies van x(t) - dus tenminste 2 x continu differentieerbaar. En het idee dat deze functies (dus de *positie* als functie van de *tijd*) steeds *gladder* en *vlakker* gingen verlopen naarmate men daarop in meer detail zou inzoomen.
(N.B. *glad* en *vlak* zijn wiskundig goed definieerbaar in dit verband ! - niet alle functies worden steeds gladder naarmate men steeds 'dieper' kijkt).

Tot zover is alles natuurlijk bekend.
Interessant hieraan vind ik het concept van de infinitesimaal. Deze δx (het oneindig kleine), bestaat dat eigenlijk? Bestaat dat in 'het echt', in de werkelijkheid; bestaat het 'Platonisch'?
Over dat laatste wil ik het nu niet hebben. Maar de vraag of het bestaat houdt wel enkele mensen bezig. Vooral, wanneer het 'oneindig klein' wordt gemaakt. Kan dat zo maar?
En als het (vrijwel) oneindig klein is, is het dan nog wel hanteerbaar? Gebeurt er dan iets bijzonders - in de formulers, in ons denken, in de *platonische* ruimte waar deze begrippen zich 'bevinden'?
Bestaat er een 'discontinue overgang' van iets vrijwel oneindig kleins naar iets dat een punt is in de tijd of in de ruimte?
Ik heb mij die vragen zelf nooit gesteld, braaf als ik op school de limiet heb leren nemen, gedachtenloos haast...

Maar onlangs zag ik het terug, toen ik voor een vriend mij verdiepte in een stukje van Gilles Deleuze: Difference and Repetition. Link: https://en.wikipedia.org/wiki/Gilles_Deleuze
Ik laat hier een citaat volgen:

<citaat 1>:
p. 46, 47

Must we say that vice-diction does not go as far as contradiction, on the grounds that it concerns only properties? In reality, the expression 'infinitely small difference' does indeed indicate that the difference vanishes so far as intuition is concerned. **Once it finds its concept, however, it is rather intuition itself which disappears in favour of the differential relation, as is shown by saying that dx is minimal in relation to x, as dy is in relation to y, but that dy/dx is the internal qualitative relation, expressing the universal of a function independently of its particular numerical values.** However, if this relation has no numerical determinations, it does have degrees of variation corresponding to diverse forms and equations. **These degrees are themselves like the relations of the universal, and the differential relations, in this sense, are caught up in a process of reciprocal determination which translates the interdependence of the variable coefficients.13** But once again, reciprocal determination expresses only the first aspect of a veritable principle of reason; the second aspect is complete determination.

For each degree or relation, regarded as the universal of a given function, determines the existence and distribution of distinctive points on the corresponding curve. We must take great care here not to confuse 'complete' with 'completed'.

The difference is that, for the equation of a curve, for example, the differential relation refers only to straight lines determined by the nature of the curve. It is already a complete determination of the object, yet it expresses only a part of the entire object, namely the part regarded as 'derived' (the other part, which is expressed by the so-called primitive function, can be found only by integration, which is not simply the inverse of differentiation.

Similarly, it is integration which defines the nature of the previously determined distinctive points). That is why an object can be completely determined - ens omni modo determinatum - without, for all that, possessing the integrity which alone constitutes its actual existence.

Under the double aspect of reciprocal determination and complete determination, however it appears already as if the limit coincides with the power itself.

The limit is defined by convergence.
The numerical values of a function find their limit in the differential relation;
the differential relations find their limit in the degrees of variation; and at each degree the distinctive points are the limits of series which **are analytically continued** one into the other.

Not only is the differential relation the pure element of potentiality, but the limit is the power of the continuous, as continuity is the power of these limits themselves.

Difference thus finds its concept in a negative, but a negative of
pure limitation, a nihil respectivum (**dx is nothing in relation to x**).
< einde citaat 1>

en nog een ander citaat (excuus voor de uitgebreidheid van dit oneindig kleine onderwerp):

< citaat 2>:
p. 170 e.v.

Just as we oppose difference in itself to negativity, so we oppose dx to notA, the symbol of difference [Differenzphilosophie] to that of contradiction. It is true that contradiction seeks its Idea on the side of the greatest difference, whereas the differential risks falling into the abyss of the infinitely small. This, however, is not the way to formulate the problem: it is a mistake to tie the value of the symbol dx to the existence of infinitesimals; but it is also a mistake to refuse it any ontological or gnoseological value in the name of a refusal of the latter. In fact, there is a treasure buried within the old so-called barbaric or pre-scientific interpretations of the differential calculus, which must be separated from its infinitesimal matrix. A great deal of heart and a great deal of truly philosophical naivety is needed in order to take the symbol dx seriously: for their part, Kant and even Leibniz renounced the idea. Nevertheless, in the esoteric history of differential philosophy, three names shine forth like bright stars: Salomon Malmon - who, paradoxically, sought to ground post-Kantianism upon a Leibnizian reinterpretation of the calculus (1 790);
Hoene Wronski, a profound mathematician who developed a positivist, messianic and mystical system which implied a Kantian interpretation of the calculus (1 814); and Jean BordasDemoulin who, in the course of reflections upon Descartes, offered a Platonic interpretation of the calculus (1 843).

A Leibniz, a Kant and a Plato of the calculus: the many philosophical riches to be found here must not be sacrificed to modern scientific technique.

The principle of a general differential philosophy must be the object of a rigorous exposition, and must in no way depend upon the infinitely small.

The symbol **dx** appears as simultaneously undetermined, determinable and determination. Three principles which together form a sufficient reason correspond to these three aspects: a principle of determinability corresponds to the undetermined as such **(dx, dy)**;
a principle of reciprocal determination corresponds to the really determinable (**dy/dx)**; a principle of complete determination corresponds to the effectively determined (values of **dy/dx)**.

In short, dx is the Idea - the Platonic, Leibnizian or Kantian Idea, the 'problem' and its being. The Idea of fire subsumes fire in the form of a single continuous mass capable of increase. The Idea of silver subsumes its object in the form of a liquid continuity of fine metal. However, while it is true that continuousness must be related to Ideas and to their problematic use, this is on condition that it be no longer defined by characteristics borrowed from sensible or even geometric intuition, as it still is when one speaks of the interpolation of intermediaries, of infinite intercalary series or parts which are never the smallest possible. Continuousness truly belongs to the realm of Ideas only to the extent that an ideal cause of continuity is determined. Taken together with its cause, continuity forms the pure element of quantitability, which must be distinguished both from the fixed quantities of intuition [quantum] and from variable quantities in the form of concepts of the understanding [quantitas] .

The symbol which expresses it is
therefore completely undetermined: dx is strictly nothing in relation to x, as dy is in relation to y. The whole problem, however, lies in the signification of these zeros. Quanta as objects of intuition always have particular values; and even when they are united in a fractional relation, each maintains a value independently of the relation. As a concept of the understanding, quantitas has a general value; generality here referring to an infinity of possible particular values: as many as the variable can assume.

However, there must always be a particular value charged with representing the others, and with standing for them: this is the case with the algebraic equation for the circle, $\mathbf{x^2 + y^2 - R^2 = 0}$.
The same does not
hold for $\mathbf{ydy + xdx = 0}$, which signifies 'the universal of the circumference or of the corresponding function'. The zeros involved in dx and dy express the annihilation of the quantum and the quantitas, of the general as well as the particular, in favour of 'the universal and its appearance'. The force of the interpretation given by Bordas-Demoulin is as follows: it is not the differential quantities which are cancelled in **dy/dx or 0/0** but rather the individual and the individual relations within the function (by 'individual', Bordas means both the particular and the general). We have passed from one genus to another, as if to the other side of the mirror: having lost its mutable part or the property of variation, the function represents only the immutable along with the operation which uncovered it. 'That which is cancelled changes in it, and in being cancelled allows a glimpse beyond of that which does not change . .S
In short, the limit must be conceived not as
the limit of a function but as a genuine cut [coupure], a border between the changeable and the unchangeable within the function itself.
Newton's mistake, therefore, is that of making the **differentials equal to zero**, while
Leibniz's mistake is to identify them with the **individual or with variability.**

<einde citaat 2>.

Ik kan genieten van het bovenstaande.
Ik weet bij lange na niet of ik Deleuze wel kan volgen en hem begrijp.
Maar - voor mij, en vanuit wiskundig oogpunt bezien - vind ik zijn tekst een prachtig 'door elkaar lopen' van filosofische gedachten, gedachten-experimenten, wiskundige expressies, wiskundig begrippen en noties en leken-interpretaties daarvan.

Kennelijk is het 'oneindig kleine' een (filosofische) notie van zwaarwegende betekenis. En ik kan mij niet aan de indruk onttrekken dat er meer mensen heil zin in dit jongleren met het oneindig kleine.
De vragen waar ik niet op in ben gegaan:
1 *bestaat* de (een) functie en zijn afgeleide?
2 in welke zin is dit bestaan? Platonisch, antiplatonisch of anders?
3 bestaat het 'oneindig kleine'? En zo ja, waar bestaat dat dan?
4 zijn vragen 1 t/m 3 zinvol en welke betekenis hebben ze?

\- - - - - Jan, 8 mei 2017, Den Haag □