1 Inleiding

In zijn bijdrage over "Het oneindig kleine"vraagt Jan zich af of infinitesimalen zoals $\mathrm{d}x$ bestaan. In mijn reactie daarop stel ik twee benaderingen voor:

1. In de klassieke aanpak worden $\mathrm{d}f$ en $\mathrm{d}x$ in de vorm $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ niet als betekenisdargende elementen gezien. In laats daarvan wordt de vorm $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ beschouwd als zgn. *differentiaaloperator*. De notatie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ is daarbij alleen een handige notatie voor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)$.
2. In de jaren '60 van de vorige eeuw heeft Abraham Robinson de *non-standaard analyse* ontwikkeld waarbij de reële getallen op consistente wijze worden uitgebreid met infinitedimalen. Ik weet daar te weing van om er hier uitgebreid op in te gaan.

Die reactie ontlokte op zijn beurt commentaar van Herman die zich afvroeg of $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ dan niet meer als quotient kon worden opgevat.

2 De vraag van Herman

Herman verwijst naar de afleiding van de Lorenz factor zoals die in de speciale realativiteitstheorie voorkomt. Die afleiding ziet er zo uit:

$$E\,\mathrm{d}E = \frac{pc^2}{v}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \frac{pc^2}{v}\,\mathrm{d}p\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{pc^2}{v}\,\mathrm{d}p\,v = pc^2\,\mathrm{d}p$$

In deze afleiding speelt de gelijkheid

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}p\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

een essentiële rol. Maar is die gelijkheid nog wel waar als we vormen als $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ niet meer als quotiënt mogen interpreteren?

3 De natuurkunde

Natuurkundigen zijn berucht om hun informele en pragmatische benadering van de wiskunde en de afleiding die Herman geeft is daar een mooi voorbeeld van. Het idee dat differentiaalquotiënten zich "gewoonäan de algebra van de breukvermenigvuldiging houden is daar wijdverbreid. Zo komen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ en $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$ regelmatig voor. Lang geleden vertelde ik een studievriend (hij studeerde chemische technologie en die lui zijn nog erger dan natuurkundigen) dat die opvatting ongefundeerd was. Hij was zowel verbaasd als niet geïnteresseerd: het werkt toch? En inderdaad, zowel bij de afleiding van de Lorenz factor als bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen werkt deze opvatting, gefundeerd of niet, uitermate handig.

De basis van deze informele goocheltrucs is dat veel natuurkundigen de vorm $\mathrm{d}x$ niet zien als öneindig klein"(met alle daarbij komende existentie- en consistentieproblemen) maar als "heel erg kleinöf "klein genoeg". En het bestaan van heel erg kleine getallen spreekt voor zich.

4 De wiskunde

Voor wiskundigen is dit informele handgewapper een gruwel: we hebben niet voor niets in de 19de eeuw de wiskundige strengheid tot niet eerder vertoonde hoogte gebracht. Euler kwam er nog wel mee weg maar na Weirstrass en de ϵ-δ-definities was het not done!

Maar er gloort een beetje licht aan de horizon. Ten eerste is het mogelijk om een gelijkheid als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ te bewijzen, uitgaande van de formele strenge definities. En het was precies dat handige gebruik dat de toepassers er van maken dat Robinson de non-standaard analyse introduceerde.

5 Conclusie

Nee $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ is geen breuk maar het is handig om het wel als zodanig te beschouwen. Gelukkig kan dat informele gebruik wel formeel onderbouwd worden.